

7.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИСТИК ФИНАНСОВЫХ ДАННЫХ И ИХ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Стихова О.В., аспирант, преподаватель кафедры «Прикладная математика»

Московский государственный технологический университет «Станкин»

Работа посвящена исследованию статистических свойств финансовых временных рядов, моделированию статистик финансовых данных и их эмпирических распределений. Особое внимание в работе обращено на плотность распределения в условиях временной агрегации. Опираясь на проведенную в работе статистическую обработку широкого круга финансовых данных, показано, что для описания различных областей эмпирических распределений необходимо воспользоваться различными моделями. Так, для описания центральной области предложена модель α -устойчивых распределений. Для описания хвостовой части распределения предложено распределение Парето. В работе численно реализованы алгоритмы оценивания параметров α -устойчивых распределений.

ВВЕДЕНИЕ

В финансовой теории основополагающей является гипотеза случайного блуждания, которая состоит в том, что приращение цен ведет себя, как стационарный случайный процесс с независимыми и одинаковыми распределениями по нормальному закону.

Для нормального распределения теоретический коэффициент скошенности S_N равен нулю. Положительность эмпирического коэффициента скошенности $\hat{S}_N$ означает, что эмпирическая, а возможно, и истинная плотность распределения асимметрична с более крутым падением слева, нежели справа.

Наиболее весомым аргументом в пользу отклонения гипотезы «нормальности» является, конечно, слишком большое значение коэффициента вытянутости (экссцесса), растущего, как видим, с уменьшением Δ . Поскольку коэффициент вытянутости определяется через четвертый момент, то это обстоятельство наводит также на мысль, что распределение величин $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(A)}$ имеет «тяжелые» хвосты, что проще всего понимать так, что соответствующая плотность распределения $p^{(A)}(x)$ сравнительно (с нормальной плотностью) медленно убывает при $x \rightarrow \infty$.

В работах Olsen & Associates, Дакорона, Мандельброта [1], [2] и других, показано, что эмпирические распределения существенно отличаются от нормального:

- «вытянутость»: $\hat{K}_N = \frac{\hat{m}_4}{(\hat{m}_2)^2} - 3$ — эмпирический коэффициент вытянутости (экссцесса, kurtosis);
- толстохвостость — свойство распределения, характеризуемое тем, что кривая распределения при стремлении аргумента $k \rightarrow \pm \infty$ убывает значительно медленнее, чем распределение Гаусса;
- асимметрия распределения и ее центральной части, которая характеризуется коэффициентом скошенности,

$$\hat{S}_N = \frac{\hat{m}_3}{\hat{m}_2^{3/2}} < 1 \text{ — эмпирический коэффициент скошенности (асимметрии, skewness), для нормального гауссовского распределения он равен 0).}$$

Цель данной работы состояла в том, чтобы построить математические модели, описать плотности эмпирических распределений Forex со свойствами, адекватно отражающими статистический характер финансовых данных.

1. СТРУКТУРА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Имея некоторое представление о характере интенсивности, частоты появления тиков (по крайней мере, на примере статистических данных обменных курсов валют), а также представление об одномерных распределениях между тиковыми интервалами ($\tau_k - \tau_{k-1}$), и естественно теперь обратиться к статистике в поведении изменений в ценах, т.е. статистике последовательности $(S\tau_k - S\tau_{k-1})_{k \geq 1}$ или связанных с ней других величин, скажем,

$$h_{\tau_k} = \ln \frac{S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}} \quad (1)$$

Сразу следует отметить отличие дневных, недельных, месячных, ... данных от «внутридневных». Первые рассматриваются как данные, поступающие через равноотстоящие, регулярные интервалы времени Δ . Скажем, Δ может быть один день, одна неделя и т.д. При обращении же к внутридневной статистике приходится иметь дело с данными, поступающими нерегулярно, в случайные неравноотстоящие моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ с разными интервалами $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, где $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$.

Эта нерегулярность вносит определенные трудности для применения уже имеющихся методов статистического анализа данных. Поэтому, как правило, статистические данные сначала подвергаются некоторой предварительной обработке (дискретизация, отбраковка аномальных наблюдений, сглаживание, выделение трендовых составляющих и т.п.).

Остановимся подробнее на приемах дискретизации. Зафиксируем некоторый «разумный» интервал (реального физического) времени Δ . Этот интервал не должен быть слишком малым. Применительно к статистике обменных курсов нужно, чтобы этот интервал был репрезентативным в том смысле, что в него попадает значительное число тиков, или, по-другому, чтобы Δ было значительно больше среднего времени между двумя тиками. В противном случае образуемое дискретизацией статистическое «сырье» будет содержать слишком много «пустых» данных.

В случае обменных курсов основных валют в работе [3] рекомендуется брать $\Delta \geq 10$ мин., что (помимо требуемой репрезентативности) позволяет также избежать неопределенности, возникающей в связи с тем, что при меньших значениях Δ размер спреда и диапазон изменений в ценах покупки и продажи становятся сопоставимыми.

Простейший метод дискретизации состоит в том, что после выбора Δ (скажем, 10 мин., 24 часа и т.д.) вместо кусочно-постоянного процесса $S = (S_t)_{t \geq 0}$ с непрерывным временем $t \geq 0$ рассматривается новая последовательность $S^A = (S_{t_k})$ с дискретным временем $t_k = k\Delta, k = 0, 1, \dots$

Другой широко распространенный метод дискретизации состоит в том, что сначала кусочно-постоянный процесс

$$S_t = S_0 + \sum_{k \geq 1} \xi_k I(\tau_k \leq t) \quad (2)$$

заменяется на его непрерывную модификацию $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)$, получаемую линейной интерполяцией между значениями (S_{t_k}) (рис. 1):

$$\tilde{S}_t = S_{\tau_k} \frac{\tau_{k+1} - t}{\tau_{k+1} - \tau_k} + S_{\tau_{k+1}} \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k}, \quad \tau_k < t \leq \tau_{k+1}. \quad (3)$$

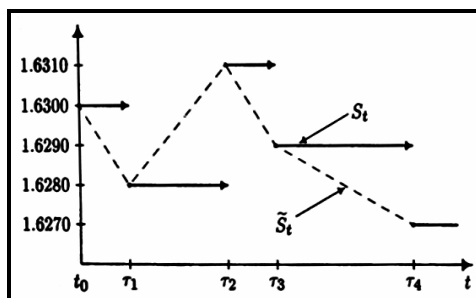


Рис. 1. Кусочно-постоянный процесс (S_t) и его непрерывная модификация ($\tilde{S}_t$)

Затем проводится дискретизация этой модификации $\tilde{S} = (\tilde{S}_{t_k})$ так, как это описано выше в простейшем методе; т.е. образуется последовательность $\tilde{S}^{\Delta} = (\tilde{S}_{t_k}^{\Delta})$ в

точках $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \dots$, с параметром Δ , определяющим тот временной интервал (месяц, неделя, день, 20 мин., 5 мин., и т.д.), который интересует инвестора, трейдера и прочих.

Помимо дискретизации во времени, статистические данные могут квантоваться или, попросту говоря, округляться также и по фазовой переменной. Обычно это делается следующим образом.

Выбирается некоторое $\gamma > 0$ и вместо исходного процесса $S = (S_t)_{t \geq 0}$ вводится новый процесс $S(\gamma) = (S_t(\gamma))_{t \geq 0}$ со значениями

$$S_t(\gamma) = \gamma \left\lfloor \frac{S_t}{\gamma} \right\rfloor. \quad (4)$$

Так, если $\gamma = 1$ и $S_t = 10.54$, то $S_t(1) = 10$; если же $\gamma = 3$, то $S_t(3) = 9$; тем самым, понятно, что определение (3) соответствует процедуре округления с ошибкой округления γ .

Если производится сначала γ -квантование, а затем Δ -дискретизация, то из (S_t) получаем новую последовательность $S^{\Delta}(\gamma)$ или $\tilde{S}^{\Delta}(\gamma)$.

Поскольку $S_t(\gamma) \rightarrow S_t$ при $\gamma \rightarrow 0$, то возникает важный вопрос о том, как согласованным образом надо выбирать Δ и γ для того, чтобы значения $(S_{t_k}(\gamma))$ в моменты времени $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \dots$, содержали «почти ту же самую информацию, что и (S_{t_k}) ». В качестве первого подхода к ответу на этот вопрос представляется естественным сначала выяснить, при каких условиях на скорости сходимости $\Delta \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow 0$ имеет место и сходимость соответствующих конечномерных распределений процессов $S^{\Delta}(\gamma)$, $\tilde{S}^{\Delta}(\gamma)$ к предельному процессу S .

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

2.1. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен

Взглянем на графики некоторых валютных курсов (рис. 2-5).

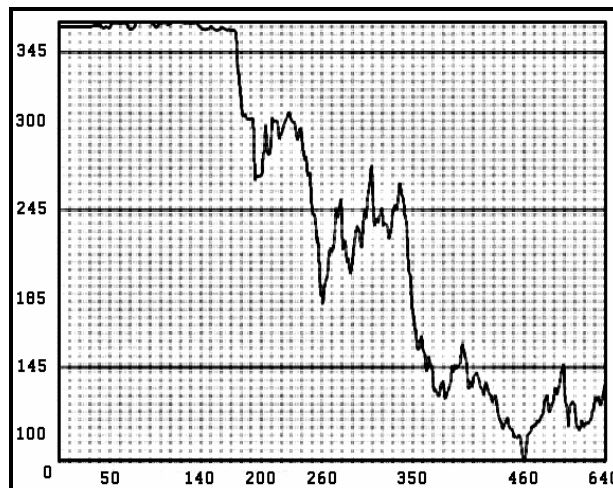


Рис. 2. График значений валютного курса японской иены по отношению к доллару за период 1962-2005 гг. (JPY/USD)



Рис. 3. График значений валютного курса немецкой марки по отношению к доллару за период 1956-2001 гг. (DEM/USD)

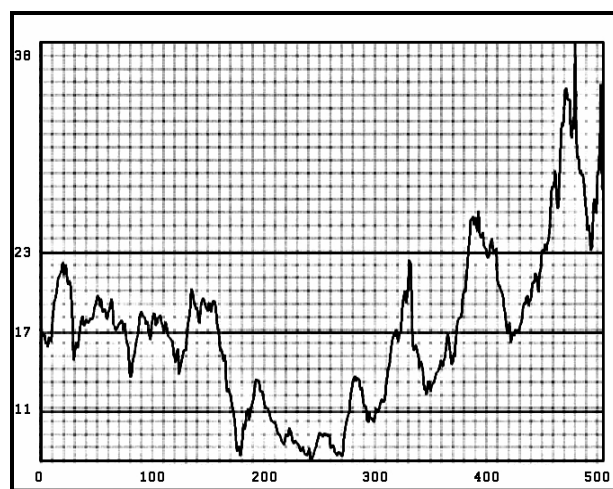


Рис. 4. График значений финансового индекса S&P500 за период 1965-2007 гг.

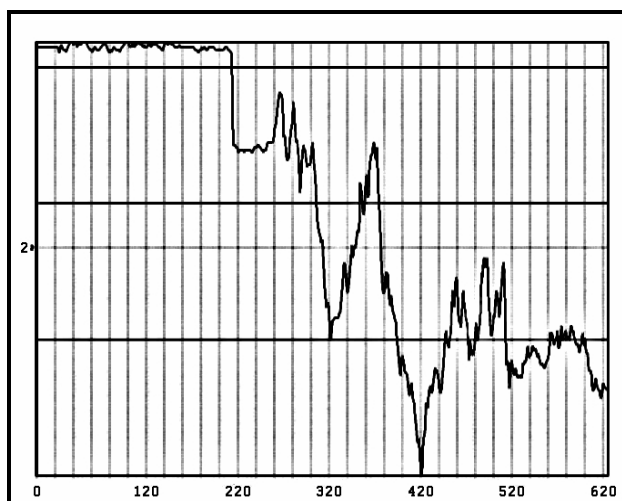


Рис. 5. График значений валютного курса английского фунта по отношению к доллару за период 1956-2007 гг. (GBP/USD)

Рассмотрим валютный курс (скажем, DEM/USD) $S = (S_t)_{t \geq 0}$ с $S_t = \sqrt{S_t^a \cdot S_t^b}$. Обозначим $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ непрерывную модификацию $S = (S_t)_{t \geq 0}$, полученную посредством линейной интерполяции.

Пусть далее $\tilde{S}^\Delta = (\tilde{S}_{t_k})_{k \geq 0}$ – Δ дискретизация $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ с $t_k = k\Delta$.

При рассмотрении изменений в ценах реальное экономическое значение имеют не сами величины изменений в ценах $\Delta \tilde{S}_{t_k} \equiv \tilde{S}_{t_k} - \tilde{S}_{t_{k-1}}$, а их относительное

изменение $\frac{\Delta \tilde{S}_{t_k}}{\tilde{S}_{t_{k-1}}} = \frac{\tilde{S}_{t_k}}{\tilde{S}_{t_{k-1}}} - 1$. В этой связи оправдан

обычный интерес к распределениям не величин $(\tilde{S}_{t_k})$,

а величин $(\tilde{H}_{t_k})$, где $\tilde{H}_{t_k} = \ln \left(\frac{\tilde{S}_{t_k}}{\tilde{S}_{t_{k-1}}} \right)$.

Будем обозначать

$$\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} = \Delta \tilde{H}_{t_k} = (\tilde{H}_{t_k} - \tilde{H}_{t_{k-1}}), \quad (5)$$

где $t_k = k\Delta, k \geq 0, \tilde{H}_0 = 0$.

С учетом способа получения $\tilde{S}^\Delta$ из S , а также введенных в параграфе 1 обозначений $(h_t = \Delta H, h_t = \Delta H)$, находим, что

$$\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} = \sum_{\{i: t_{k-1} < t_i \leq t_k\}} h_{t_i} + \tilde{r}_{t_k}^{(\Delta)}, \quad (6)$$

где слагаемое $\tilde{r}_{t_k}^{(\Delta)}$ определяется концевыми эффектами и может быть названо остаточным членом по причине его малости по сравнению с величиной выражения, определяемого суммой.

В самом деле, если, например, $\Delta = 1$ час, то, согласно данным таблицы 1, среднее число тиков для DEM/USD будет равно примерно 187 ($= 4500 / 24$). Таким образом, величина суммы в (6) определяется 187 значениями h_{t_i} . В то же время модуль $|r_{t_k}^{(\Delta)}|$ заведомо меньше или равен сумме модулей четырех значений h , отвечающих

тем моментам тиков, которые непосредственно предшествуют моментам t_{k-1}, t_k и следуют за ними.

Одна из самых значительных баз данных FX-рынка принадлежит Olsen & Associates. Согласно этой базе данных, представление об активности на FX-рынке в период 01.01.1992-31.12.1998 можно получить из табл. 1.

Таблица 1

**АКТИВНОСТЬ НА FX-РЫНКЕ
В ПЕРИОД 01.01.1992-31.12.1998 г.**

Курс	Общее число тиков в базе данных	Среднее число тиков в сутки (52 недели в году, 5 бизнес-дней в неделю)
DEM/USD	8 238 532	4 500
JPY/USD	4 230 041	2 300
GBP/USD	3 469 421	1 900
CHF/USD	3 452 559	1 900
FRF/USD	2 098 679	1 150
JPY/DEM	190 967	630
FRF/DEM	132 089	440
ITL/DEM	118 114	390
GBP/DEM	96 537	320
NLG/DEM	20 355	70

Важно подчеркнуть, что сумма, стоящая в (6), есть сумма случайного числа случайных величин, распределение которой может быть достаточно сложным, даже когда отдельные составляющие и случайное число членов имеют сравнительно простые распределения. Это обстоятельство может рассматриваться как некоторое формальное объяснение того, что, как будет показано далее, распределение величин $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ не может считаться гауссовским. Правда, мы увидим, что при увеличении Δ , влекущем за собой увеличение числа членов в сумме в (6), гипотеза о гауссовости распределений величин $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ становится более правдоподобной – начинает «сказываться» феномен справедливости центральной предельной теоремы при суммировании большого числа слагаемых.

Замечание. Обозначение $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ довольно-таки громоздко, хотя и «говорит» о способе образования этих величин. В дальнейшем для упрощения записи эти величины будут обозначаться также $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ (с указанием способа их формирования и выбранного значения Δ).

Итак, будем считать заданным $\Delta > 0$. При исследовании вопроса о совместных распределениях $Law(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots)$ последовательности значений $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$, и т.д., естественно, прежде всего заняться их одномерными распределениями, считая, что эти величины одинаково распределены и плотности их распределений являются одновершинными. (В первом приближении эта гипотеза однородности хорошо подтверждается статистическим анализом для многих финансовых индексов, по крайней мере, на не очень больших временных интервалах.

По данным Olsen & Associates в период 01.01.1992-31.12.1998 было зарегистрировано 8 238 532 тика в обменном курсе DEM/USD. О значениях характеристик одномерного распределения величин $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i^{(\Delta)}$, оцениваемых по этим статистическим данным, можно судить по следующей табл. 2 из [3]:

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕЛИЧИН
 $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i^{(A)}$ **ОДНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Δ	N	Среднее $\bar{h}_N$	Дисперсия $\hat{m}_2$	Скошенность $\hat{S}_N$	Вытянутость $\hat{K}_N$
10 мин.	368 000	$-2.73 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	0.17	35.11
1 час	61 200	$-1.63 \cdot 10^{-6}$	$1.45 \cdot 10^{-6}$	0.26	23.55
6 час.	10 200	$-9.84 \cdot 10^{-5}$	$9.20 \cdot 10^{-6}$	0.24	9.44
24 час.	2 100	$-4.00 \cdot 10^{-5}$	$3.81 \cdot 10^{-5}$	0.08	3.33

В этой таблице:

N – число выборочных точек (вида $t = i\Delta$);

$$\bar{h}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{h}_{t_i}) ;$$

$$\hat{m}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{h}_{t_i} - \bar{h}_N)^k ;$$

$$\hat{S}_N = \frac{\hat{m}_3}{\hat{m}_2^{3/2}} - \text{эмпирический коэффициент скошенности (асимметрии, skewness);}$$

$$\hat{K}_N = \frac{\hat{m}_4}{(\hat{m}_2)^2} - 3 - \text{эмпирический коэффициент вытянутости (эксцесса, kurtosis).}$$

Для нормального распределения теоретический коэффициент скошенности S_N равен нулю. Положительность эмпирического коэффициента скошенности $\hat{S}_N$ означает, что эмпирическая, а возможно, и истинная плотность распределения асимметрична с более крутым падением слева, нежели справа. Из таблицы видно также, что среднее значение (по модулю) значительно меньше стандартного отклонения (квадратного корня из дисперсии) и поэтому практически может считаться равным нулю.

Наиболее весомым аргументом в пользу отклонения гипотезы «нормальности» является, конечно, слишком большое значение коэффициента вытянутости (эксцесса), растущего, как видим, с уменьшением Δ . Поскольку коэффициент вытянутости определяется через четвертый момент, то это обстоятельство наводит также на мысль, что распределение величин $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(A)}$ имеет «тяжелые» хвосты, что проще всего понимать так, что соответствующая плотность распределения $p^{(A)}(x)$ сравнительно (с нормальной плотностью) медленно убывает при $x \rightarrow \infty$.

2.2. Отклонение от гауссовости.
«Вытянутость» эмпирических плотностей
 Отклонение от нормальности (гауссовости) величин $\tilde{h}_k$, наблюдаемое не только для обменных курсов валют, но также и для других финансовых показателей (цен акций, например), подтверждается не только видом эмпирических плотностей (гистограмм), но и стандартными статистическими приемами обнаружения отклонений от нормальности, такими как, например:

2.2. Отклонение от гауссовости.

«Вытянутость» эмпирических плотностей

Отклонение от нормальности (гауссовости) величин $\tilde{h}_k$, наблюдаемое не только для обменных курсов валют, но также и для других финансовых показателей (цен акций, например), подтверждается не только видом эмпирических плотностей (гистограмм), но и стандартными статистическими приемами обнаружения отклонений от нормальности, такими как, например:

- квантильный метод;
- χ^2 -тест;
- ранговые критерии.

Напомним суть этих приемов.

Квантильный метод проще всего иллюстрируется $Q\bar{Q}$ -графиком (рис. 6), на котором по горизонтальной

оси откладываются квантили соответствующего нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$ с параметрами (μ, σ^2) , оцениваемыми по статистическим данным, а по вертикальной оси – квантили эмпирического распределения величин $\tilde{h}_k$. (Квантиль Q_p порядка p , $0 < p < 1$, распределения случайной величины ξ есть, по определению, то значение x , для которого $P(\xi \leq x) \leq p$ и $P(\xi \leq x) \geq 1 - p$.)

В случае «хорошего» согласия эмпирического распределения с теоретическим множеством точек $(Q_p, \bar{Q}_p)$ должно быть сконцентрировано около диагональной прямой. Однако статистические данные (по курсам валют, ценам многих акций и прочее) показывают, что это не так, и график $(Q_p, \bar{Q}_p)$, изображенный на рис. 6, соответствует тому, что теоретическая (нормальная) и эмпирическая плотности имеют вид, представленный на рис. 7.

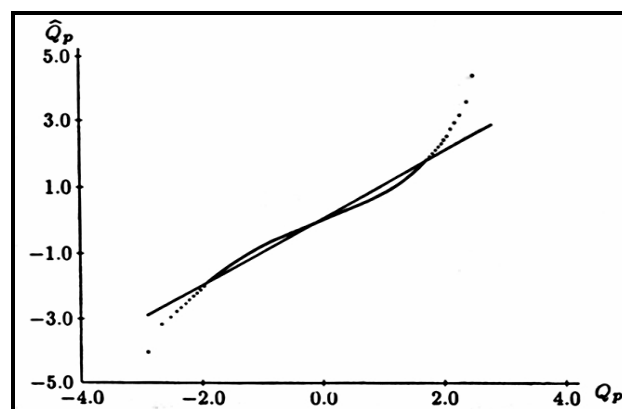


Рис. 6. $Q\bar{Q}$ - Квантильный анализ обменного курса DEM/USD с интервалом $\Delta = 20$ мин. (по данным агентства Рейтер, 5.10.97-26.9.98)

По вертикальной оси отложены квантили $\bar{Q}_p$ эмпирического распределения величин $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(A)}$, $t_k = k$, $k = 1, 2, \dots$; по горизонтальной оси – квантили Q_p нормального распределения

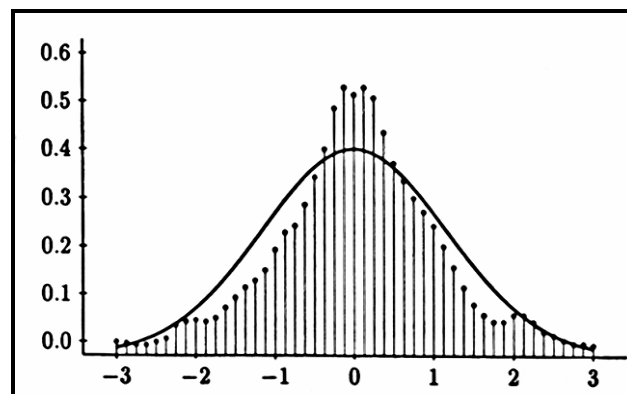


Рис. 7. Типичный график эмпирической плотности (величин $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(A)}$, $t_k = k$, $k = 1, 2, \dots$) и соответствующей теоретической (нормальной) плотности

Применение χ^2 -теста Пирсона как критерия согласия основано на построении статистики:

$$\hat{X}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - np_i)}{np_i}, \quad (7)$$

где v_i есть число наблюдений, попавших в интервалы I_i , $\sum_{i=1}^k I_i = R$, играющие роль интервалов группирования данных ($v_1 + \dots + v_k = n$), и p_i – вероятности попадания в эти множества, соответствующие проверяемому теоретическому распределению.

В соответствии с критерием согласия Пирсона, гипотеза H_0 : эмпирические данные согласуются с теоретической моделью отвергается с уровнем значимости α , если выполнено неравенство $\hat{X}^2 > \hat{X}_{k-1,1-\alpha}^2$, где $\hat{X}_{k-1,1-\alpha}^2$ есть $Q_{1-\alpha}$ – квантиль (т.е. квантиль порядка $1 - \alpha$) распределения $\hat{X}^2$ с $k - 1$ степенями свободы.

Напомним, что $\hat{X}^2$ -распределение с m степенями свободы – это распределение случайной величины $X_m^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2$, где $\xi_1^2, \dots, \xi_m^2$ – независимые стандартные нормально распределенные, $N(0,1)$, случайные величины. Плотность $f_m(x)$ такого распределения задается формулой

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} x^{m/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

В работе [4] приведены результаты статистической обработки с целью проверки гипотезы H_0 с уровнем значимости $\alpha = 1\%$ для акций десяти крупных немецких компаний и банков (BASF, BMW, Daimler Benz, Deutsche Bank, Dresdner Bank, Höchst, Preussag, Siemens, Thyssen, VW) по трехлетним данным (1.10.1994-30.09.1997). Подсчет $\hat{X}^2$ и $\hat{X}_{k-1,1-\alpha}^2$ ($k = 22$, число наблюдений $t = 745$) показывает, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута для всех этих десяти компаний без исключения. Например, для BASF и Deutsche Bank для $\hat{X}^2$ (с $p_i = 1/k$, $k = 22$) получены значения 104.02 и 88.02, в то время как критическое значение $\hat{X}_{k-1,1-\alpha}^2 = 38.93$ при $k = 22$, $\alpha = 0.01$. Тем самым $\hat{X}^2$ значительно больше $\hat{X}_{k-1,1-\alpha}^2$ и, согласно $\hat{X}^2$ – критерию, гипотеза H_0 отвергается.

3. СТАТИСТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ГРАНИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

3.1. «Тяжелые хвосты»

Отклонение от нормальности и наличие «тяжелых хвостов» у эмпирических плотностей привело к единодушному мнению, что для «правых хвостов» т.е. при $x \rightarrow +\infty$

$$P(\tilde{h}_k^{(d)} > x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad (9)$$

где «хвостовой индекс» $\alpha = \alpha(\Delta) > 0$ и $L = L(x)$ – медленно меняющаяся функция: $\frac{L(xy)}{L(x)} \rightarrow 1$, $x \rightarrow +\infty$, для любого $y > 0$. Аналогичное заключение делается и относительно «левых хвостов».

В работе [5] отмечается, что вытянутость и тяжелые хвосты плотности распределения возникают, напри-

мер, в моделях ARCH, GARCH, при рассмотрении смесей нормальных распределений.

В ряде работ [6] для распределений величин $\tilde{h}_k^{(d)}$ предлагается использовать t -распределение Стьюдента, имеющее плотность

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (10)$$

где целочисленный параметр n носит название «число степеней свободы». Из (10) видно, что это распределение относится к распределениям типа Парето с тяжелыми хвостами.

После работ Б. Мандельброта (см., например, [7], [8]) и Е. Фама (см. [5]) в финансовой литературе широкую популярность получили модели финансовых индексов, основанные на устойчивых распределениях. Эти распределения имеют свой «индекс устойчивости» α , принимающий значения из интервала $(0,2]$. В случае $\alpha = 2$ устойчивое распределение является нормальным; при $0 < \alpha < 2$ соответствующее распределение является распределением типа Парето (9), где «хвостовой индекс» α есть в точности «индекс устойчивости».

Таким образом, гипотеза устойчивого распределения с $0 < \alpha < 2$ для описания распределений $\tilde{h}_k = \tilde{h}_k^{(d)}$ естественна, поскольку для этого распределения имеются и тяжелые хвосты, и вытянутость, наблюдаемые в статистических данных. Помимо этого, обращение к устойчивым распределениям оправдывается следующим характеристическим свойством автомодельности этих распределений: если случайные величины X и Y независимы и имеют устойчивое распределение с индексом устойчивости α , то их сумма также имеет устойчивое распределение с тем же самым индексом, или, что то же, композиция распределений X и Y является распределением того же типа.

С экономической точки зрения это есть вполне естественное требование сохранения характера распределений данных при временной агрегации (time aggregation), выполнение которого для устойчивых распределений делает их применение еще более оправданным.

Однако при оперировании с устойчивыми распределениями возникает ряд существенных трудностей, вызванных следующими причинами.

Если X – случайная величина с устойчивым распределением индекс $0 < \alpha < 2$, то $E|X| < \infty$, если только $\alpha > 1$. И,

вообще, $E|X|^p < \infty$ тогда и только тогда, когда $p < \alpha$.

Тем самым, у устойчивого распределения с индексом $0 < \alpha < 2$ хвосты настолько «тяжелы», что второй момент является бесконечным. Это обстоятельство вносит значительные трудности теоретического характера (например, при анализе качества различных оценок, критериев, основанных на использовании дисперсии) и, с другой стороны, трудно поддается и экономическому объяснению, и реальной проверке в силу того, что имеется, как правило, лишь ограниченное число статистических данных.

В связи с последним обстоятельством отметим, что оценка истинного значения «хвостового индекса» α является, вообще говоря, делом довольно-таки деликатным.

Связано это с тем, что для «хорошей» оценки α надо, с одной стороны, иметь достаточно много наблюдений, с тем чтобы набрать значительное число экстремальных значений, по которым только и можно оценить «хвостовые эффекты» и «хвостовой индекс». Но, с другой стороны, наличие большого числа «неэкстремальных» наблюдений будет вносить, к сожалению, смещение при оценивании истинного значения α .

Из свойств устойчивых распределений следует, что если их использовать для описания распределений финансовых индексов, то не удастся совместить сразу три требования: сохранение типа распределения при композиции, наличие тяжелых хвостов с индексом $0 < \alpha < 2$ и конечность второго момента, а значит, и дисперсии.

Понятно, что конечность дисперсии имеет место для распределений типа Парето с «хвостовым индексом» $\alpha > 3$. И хотя такие распределения не обладают свойством замкнутости относительно композиции, они обладают, тем не менее, важным свойством сохранения характера убывания плотности распределения при композиции: если X и Y имеют одно и то же распределение типа Парето с «хвостовым индексом» α и независимы, то их сумма $X + Y$ также имеет распределение типа Парето с тем же самым «хвостовым индексом» α . С этой точки зрения распределения типа Парето можно считать удовлетворяющими желаемому свойству устойчивости хвостового индекса α при композиции.

Даже только из сказанного выше становится понятно, почему индексу α , определяющему характер поведения распределений величин $\tilde{h}_{t_k}^{(A)}$ на бесконечности, уделяется столь большое внимание. Можно дать также и экономико-финансовое объяснение интереса к индексу α . Дело в том, что «хвостовой индекс» показывает, в частности, насколько активны на рынке игроки со спекулятивными интересами. Если «хвостовой индекс» α большой, то это говорит о том, что на рынке редки аномальные выбросы в значениях цен, что рынок ведет себя гладко без больших колебаний в значениях цен. В этом смысле рынок при больших значениях α может рассматриваться как эффективно функционирующий, и, тем самым, значение индекса α является некоторой мерой этой эффективности.

3.2. Алгоритм оценки параметров «тяжелых хвостов»

Обратимся к вопросу об оценивании индекса устойчивости для устойчивых распределений и, более общим образом, к «хвостовому индексу» для распределений типа Парето. Сразу следует отметить, что в финансовой литературе нет единодушного мнения о том, каково же все-таки истинное значение «хвостового индекса» α для тех или иных обменных курсов, акций и других финансовых показателей. Объясняется это, как уже отмечалось, трудностью построения эффективных оценок $\tilde{\alpha}_N$ (N – число наблюдений) параметра α . Сама же по себе постановка задачи оценивания этого параметра требует аккуратного формулирования всех предпосылок получения статистического сырья $\{\tilde{h}_{t_k}^{(A)}\}$, правильного выбора значений Δ и т.д.

В финансовой литературе для оценки индекса устойчивости α часто используют (эффективные) оценки $\tilde{\alpha}_N$, предложенные в работах [9] и определяемые следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_N = 0.827 \frac{\hat{Q}_f - \hat{Q}_{f-f}}{\hat{Q}_{0.72} - \hat{Q}_{0.28}}, \quad 0.95 \leq f \leq 0.97, \quad (11)$$

где $\hat{Q}_f$ есть квантиль порядка f , построенный по выборке объема N в предположении, что наблюдения подчиняются симметричному устойчивому распределению.

В случае справедливости гипотезы о принадлежности закона распределения $\text{Law}(\tilde{h}_k)$, $\tilde{h}_k = \tilde{h}_k^{(A)}$, к классу устойчивых распределений (с индексом устойчивости α) можно было бы, естественно, рассчитывать на то, что $\tilde{\alpha}_N$ с ростом объема наблюдений N стабилизируются (и имеет место сходимость $\tilde{\alpha}_N$ к некоторому значению $\alpha < 2$).

Однако здесь, как уже отмечалось, нет единодушия. В ряде работ есть утверждения о «хорошей» стабилизации строящихся оценок для некоторых финансовых индексов – см., например [10]. С другой же стороны, во многих работах приводятся результаты статистического анализа, показывающие, что $\tilde{\alpha}_N$ имеют не только тенденцию роста, но даже стремление к значениям, равным или большим 2 – см., например [11] относительно акций на американском рынке и [12] по поводу акций крупных немецких компаний и банков. Это заставляет к гипотезе устойчивости относиться с осторожностью, хотя, разумеется, не противоречит гипотезе о том, что «хвосты» описываются распределениями типа Парето.

Приведем результаты относительно значений «хвостового индекса» α обменных курсов валют в предположении, что для $\tilde{h}_k = \tilde{h}_k^{(A)}$ действует распределение типа Парето (9).

Для «хвостового индекса» $\alpha = \alpha(\Delta)$ были получены значения, приведенные в табл. 3. Сделаем некоторые комментарии к этой таблице.

Оценки $\tilde{\alpha}$ параметра α строились на базе данных «Olsen & Associates». В случае $\Delta = 6$ час. точность оценивания уменьшается, что связано с недостаточным объемом наблюдений.

Важный вывод, который можно сделать из анализа значений этой таблицы (составленной по большой базе данных, а потому и представляющей надежной), состоит в том, что по отношению к USD курсы основных валют FX-рынка имеют (для $\Delta = 10$ мин.) распределение типа Парето с «хвостовым индексом» $\alpha \approx 3.5$ с его возрастанием при увеличении интервала Δ . Тем самым становится весьма правдоподобным, что дисперсия величин $\tilde{h}_k = \tilde{h}_k^{(A)}$ конечна, (свойство весьма желательное!), хотя этого нельзя сказать о четвертом моменте, определяющем величину вытянутости распределений в окрестности центральных значений.

В другой работе Olsen & Associates [8], приводятся также данные курсов XAU/USD и XAG/USD (XAU – золото, XAG – серебро). Для $\Delta = 10$ мин. соответствующими оценками α являются 4.32 ± 0.56 и 4.04 ± 1.71 ; для $\Delta = 30$ мин. эти оценочные значения есть 3.88 ± 1.04 и 3.92 ± 0.73 соответственно.

Здесь будет описана только идея построения оценок α «хвостового индекса» α (с применением техники бутстрапа (bootstrap) и складного ножа (jackknife) при определении смещения и стандартного отклонения оценок), вошедших в представленную табл. 3.

Таблица 3

СМЕЩЕНИЕ И СТАНДАРТНОЕ
УКЛОНЕНИЕ ОЦЕНОК

Курс/Δ	10 мин.	30 мин.	1 час	6 час.
DEM/USD	3.11 ± 0.33	3.35 ± 0.29	3.50 ± 0.57	4.48 ± 1.64
JPY/USD	3.53 ± 0.21	3.55 ± 0.47	3.62 ± 0.46	3.86 ± 1.81
GBP/USD	3.44 ± 0.22	3.52 ± 0.46	4.01 ± 1.09	6.93 ± 10.79
CHF/USD	3.64 ± 0.41	3.74 ± 0.82	3.84 ± 0.77	4.39 ± 4.64
FRF/USD	3.34 ± 0.22	3.29 ± 0.47	3.40 ± 0.69	4.61 ± 1.21
FRF/DEM	3.11 ± 0.41	2.55 ± 0.23	2.43 ± 0.23	3.54 ± 1.42
NLG/DEM	3.05 ± 0.27	2.44 ± 0.08	2.19 ± 0.12	3.37 ± 1.43
ITL/DEM	3.31 ± 0.51	2.93 ± 1.17	2.54 ± 0.49	2.86 ± 0.98
GBP/DEM	3.68 ± 0.35	3.63 ± 0.42	4.18 ± 1.67	3.22 ± 0.79
JPY/DEM	3.69 ± 0.41	4.18 ± 0.90	4.13 ± 1.05	4.71 ± 1.61

Рассмотрим распределение Парето с плотностью

$$f_{ab}(x) = \frac{ab^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq b \quad (12)$$

и $f_{ab}(x) = 0$ для $x < b$.

При $x \geq b$

$$\ln f_{ab}(x) = \ln a + \alpha \ln b - (\alpha + 1) \ln x. \quad (13)$$

Отсюда находим, что оценка максимального правдоподобия $\hat{a}_N$ по N независимым наблюдениям $(X_1, \dots, X_N)$, отыскиваемая из условия

$$\max_{\alpha} \prod_{k=1}^N f_{ab}(X_k) = \prod_{k=1}^N f_{\hat{a}_N b}(X_k), \quad (14)$$

определяется из соотношения:

$$\frac{1}{\hat{a}_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{X_i}{b} \right). \quad (15)$$

Поскольку для $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\alpha \int_b^\infty (\ln x) x^{-(\alpha+1)} dx = \beta^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + \ln \beta \right),$$

то

$$E \ln \frac{X_i}{b} = ab^\alpha \int_b^\infty \left(\ln \frac{x}{b} \right) x^{-(\alpha+1)} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Тем самым, $E \left(\frac{1}{\hat{a}_N} \right) = \frac{1}{\alpha}$, т. е. величина $1/\hat{a}_N$ несмещенным образом оценивает $1/\alpha$, так что найденная оценка $\hat{a}_N$ параметра α обладает вполне хорошими свойствами, но, конечно, в предположении, что истинное распределение является (точно) распределением Парето с известным «началом» b , а не распределением типа Парето, для которого «начало» b просто не определено.

Тем не менее, возникает естественная идея (см. [13]) использования формулы (15) для оценки параметра α в распределениях типа Парето, но с заменой неизвестного «начала» b некоторой подходящей оценкой.

Можно поступить, например, так. Выберем некоторое достаточно большое (но не очень большое по сравнению с N) число M и воспользуемся для построения оценки параметра α модификацией формулы (15) с заменой b на M и суммированием по тем $i \leq N$, для которых $X_i \geq M$.

С этой целью определим:

$$\hat{Y}_{N,M} = \frac{\sum_{\{i \leq N: X_i \geq M\}} \ln \frac{X_i}{M}}{\sum_{\{i \leq N: X_i \geq M\}} I_M(X_i)}, \quad (16)$$

где $I_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq M, \\ 0, & \text{если } x < M. \end{cases}$

Если обозначить

$$v_{N,M} = \sum_{\{i \leq N: X_i \geq M\}} I_M(X_i),$$

то $\hat{Y}_{N,M}$ переписывается в виде

$$\hat{Y}_{N,M} = \frac{1}{Y_{N,M}} \sum_{\{i \leq N: X_i \geq M\}} \ln \frac{X_i}{M}, \quad (17)$$

и в качестве оценки параметра α естественно взять значение $\hat{a}_{N,M}$ такое, что

$$\frac{1}{\hat{a}_{N,M}} = \hat{Y}_{N,M}. \quad (18)$$

Можно поступить и по-другому. Упорядочим выборку $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ выборку $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_N^*)$ такое, что $(X_1^* \geq X_2^* \geq \dots \geq X_N^*)$. Зафиксируем снова некоторое число $M \ll N$ в качестве «начала» b и положим

$$Y_{N,M}^* = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} \ln \frac{X_i^*}{X_M^*}, \quad (19)$$

тогда в качестве оценки параметра α можно взять значение $\alpha_{N,M}^*$ такое, что

$$\frac{1}{\alpha_{N,M}^*} = Y_{N,M}^*. \quad (20)$$

Так полученная оценка $\alpha_{N,M}^*$ была предложена Б.М. Хиллом в [13], и ее принято называть оценкой Хилла.

Понятно, что «хорошие» свойства этой оценки определяются правильным выбором числа M , т. е. числа максимальных порядковых статистик, формирующих статистику $\alpha_{N,M}^*$. Но понятно также, что трудно рассчитывать на какой-то универсальный выбор числа M для широкого класса медленно меняющихся функций $L = L(x)$, определяющих поведение, скажем, правого «хвоста»

$$P(X_i > x) \sim x^{-\alpha} L(x). \quad (21)$$

Как правило, свойства рассмотренных выше оценок $\hat{a}_{N,M}$ и $\alpha_{N,M}^*$ изучают, ограничиваясь тем или иным подклассом функций $L = L(x)$. Например, можно предположить, что $L = L(x)$ принадлежит подклассу

$$L_\gamma = \{L \mid L(x) \neq L(x) \quad 1 + ex^{-\gamma} + o(x^{-\gamma}), \gamma > 0\}, \quad (22)$$

где $\gamma > 0$.

В таком предположении в [13] показано, что если при $N \rightarrow \infty$ величина $M \rightarrow \infty$, но так, что $\frac{M}{N^{2\gamma/(2\gamma+\alpha)}} \rightarrow 0$, то

$Law(\sqrt{N}(\alpha_{N,M}^* - \alpha)) \rightarrow N(0, \alpha^2)$, т. е. имеет место асимптотическая нормальность оценок $(\alpha_{N,M}^*)$.

4. СТРУКТУРА ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

4.1. Структура эмпирических распределений в центральной области

Как же все-таки, имея в виду характер распределения $Law(\tilde{h}_k)$, совместить вытянутость плотности в окрестности центральных значений и тяжелые хвосты с «хвостовым индексом» $\alpha > 2$ (как это имеет место, например, в случае обменных курсов валют)?

Видимо, трудно ожидать, что это можно сделать с помощью какого-то одного стандартного распределения. С учетом наличия на рынках трейдеров, инвесторов и прочих агентов с разными интересами, разными временными горизонтами, более импонирует та точка зрения, что надо к рассмотрению привлекать несколько стандартных распределений, действующих в «своих» областях значений x , принимаемых величинами $\tilde{h}_k$.

Многие авторы, и, в первую очередь, Б. Мандельброт, настойчиво пропагандируют идею использования именно устойчивых распределений (и некоторых модификаций, построенных на их основе) как тех, которые хорошо действуют в центральной области значений x . См., например, монографию [14] с богатым статистическим материалом, теорией устойчивых распределений и их обобщений, результатами статистического анализа.

Ниже мы подробнее останавливаемся на результатах работы [15] относительно использования устойчивых законов при описании индекса S&P500 в его центральной зоне. (Для описания «хвостовой» части авторы [15] предлагают использовать нормальное распределение, исходя, в частности, из того, что ограниченность статистического сырья не дает возможности сделать надежные заключения относительно поведения «хвостов»; см. также [16]).

Обратимся к результатам статистического анализа данных по индексу S&P500. Рассматривалась эволюция этого индекса на Нью-Йоркской бирже NYSE (New York Stock Exchange) в течение шести лет (с января 1989 г. по декабрь 1994 г.). Всего было зарегистрировано 1 447 514 тиков) данные от Chicago Mercantile Exchange). В среднем тики шли примерно минутным интервалом в 1989-90 гг. и с пятнадцатисекундным интервалом 1991-92 гг.

Поскольку в течение дня биржа работает лишь от «открытия» до «закрытия», то для получения соответствующего процесса, описывающего эволюцию индекса S&P500, принималось во внимание лишь «торговое время» (trading time) t со стыковкой «цен закрытия вчера» с «ценами открытия сегодня».

Пусть $S = (S_t)$ – процесс, полученный описанным образом. Будем рассматривать изменение этого процесса через некоторые интервалы времени Δ :

$$\Delta S_{t_k} = S_{t_k} - S_{t_{k-1}}, \quad (23)$$

где $t_k = k\Delta$.

Интервал Δ пробегает ряд значений от 1 мин. до 10^3 мин. Δ принимает следующие значения: $\Delta = 1, 3, 10, 32, 100, 316$ и $1\,000$ – в минутах; соответствующее интервалу $\Delta = 1$ мин. количество тиков равно 493 545, а при $\Delta = 1\,000$ мин. это число равно 562).

Если пользоваться обозначениями из параграфа 1, то можно заметить, что, поскольку $\tilde{S}_{t_k} \approx S_{t_k}$ и приращения

$$\Delta S_{t_k} \equiv S_{t_k} - S_{t_{k-1}} \text{ малы, } S_{t_k} \approx S_{t_{k-1}} e^{\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}} \approx S_{t_{k-1}} (1 + \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}),$$

откуда $\Delta S_{t_k} \approx S_{t_{k-1}} \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$. Это (приближенное) соотношение показывает, что в случае независимости приращений $(S_{t_k} - S_{t_{k-1}})$ характер распределения $P(\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} \leq x)$ и условного распределения $P(\Delta S_{t_k} \leq x | S_{t_{k-1}} = y)$ примерно один и тот же. Опираясь с эмпирическими плотностями $\hat{p}^{(\Delta)}(x)$ величин ΔS_{t_k} , $t_k = k\Delta$ предполагаемых одинаково распределенными, графики $\log_{10} \hat{p}^{(\Delta)}(x)$, схематически ведут себя так, как это изображено на рис. 8.

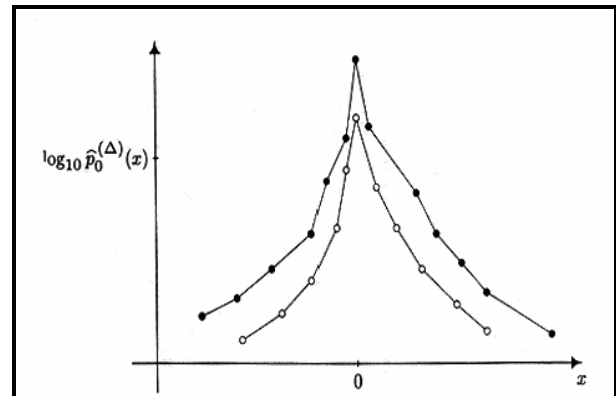


Рис. 8. Схематический график поведения $\log_{10} \hat{p}^{(\Delta)}(x)$ при двух разных значениях Δ

Даже простой визуальный анализ графиков $\log_{10} \hat{p}^{(\Delta)}(x)$, для многих значений Δ , показывает, что плотности распределений достаточно симметричны и начинают расплываться с ростом Δ , убывая при $x \rightarrow \pm\infty$, но все же не так быстро, как это должно было бы быть для гауссовского распределения.

Наблюдаемые здесь одновёршинность, симметричность, а также характер убывания эмпирических плотностей говорит о целесообразности обращения к симметричным устойчивым распределениям. Напомним, что характеристическая функция $\varphi(\theta) = Ee^{i\theta x}$ устойчивых случайных величин X с симметричным распределением имеет вид:

$$\varphi(\theta) = e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha}, \quad (24)$$

где $\sigma \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 2$. Таким образом, если принять гипотезу «устойчивости» то прежде всего надо было бы оценить значение параметра α . Устойчивые распределения относятся к распределениям типа Парето. В симметричном случае для $0 < \alpha < 2$

$P(|X| > x) \approx \tilde{c}_\alpha x^{-\alpha}$, $x \rightarrow \infty$, где $\tilde{c}_\alpha$ – некоторая константа, и для определения значения α можно было бы воспользоваться техникой оценивания, изложенной выше, в 3.1.

Необходимо отметить, что недостаточное число наблюдений делает этот метод оценивания параметра α не совсем надежным, поскольку он требует большого числа экстремальных значений. Поэтому вместо этого мы используем подход, который, наоборот, оперирует

лишь с центральными значениями наблюдений. Суть этого подхода в следующем.

Пусть характеристическая функция $\varphi^{(\Delta)}(\theta) = Ee^{i\theta\Delta S_{t_k}}$ имеет вид

$$\varphi^{(\Delta)}(\theta) = e^{-\gamma\Delta|\theta|^\alpha}. \quad (25)$$

Тогда плотность $\hat{p}^{(\Delta)}(x)$ распределения $P(\Delta S_{t_k} \leq x)$ по формуле обращения может быть представлена в виде

$$\hat{p}^{(\Delta)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma\Delta|\theta|^\alpha} \cos \theta x d\theta.$$

При $x = 0$

$$\hat{p}^{(\Delta)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma\Delta|\theta|^\alpha} d\theta = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma\Delta)^{1/\alpha}}.$$

Тем самым

$$\hat{p}^{(n\Delta)}(0) = n^{-1/\alpha} \hat{p}^{(\Delta)}(0). \quad (26)$$

Конечно, этот результат можно было бы получить и без обращения к представлению (25), если воспользоваться самим определением устойчивых законов, согласно которому

$$\begin{aligned} \text{Law}(\Delta S_{t_1} + \Delta S_{t_2} + \dots + \Delta S_{t_n}) = \\ = \text{Law}(C_n(S_{t_1} - S_0)), t_0 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

и если знать результат о том, что $C_n = n^{1/\alpha}$.

Действительно, поскольку

$$\Delta S_{t_1} + \Delta S_{t_2} + \dots + \Delta S_{t_n} = S_{t_n} - S_0,$$

то

$$\text{Law}(S_{t_n} - S_0) = \text{Law}(n^{1/\alpha}(S_{t_1} - S_0)).$$

Поэтому

$$\hat{p}^{(n\Delta)}(x) = n^{-1/\alpha} \hat{p}^{(\Delta)}(xn^{-1/\alpha}), \quad (28)$$

что при $x = 0$ приводит к формуле (26).

Соотношение (5) дает возможность по эмпирическим плотностям $\hat{p}^{(n\Delta)}(0)$ с $\Delta = 1$ мин. и $n = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$, переходя к логарифмам и применяя метод наименьших квадратов, получить оценку $\hat{\alpha}$ «индекса устойчивости» α . (Выбор указанных значений $n = 1, 3, 10, \dots$ связан с тем, что их $\log_{10} n$ почти равноотстоят друг от друга: $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 32 = 1.505$). Значение полученной таким способом оценки α таково:

$$\hat{\alpha} = 1.40 \pm 0.05. \quad (29)$$

Сразу отметим, что этот результат нельзя ни в коем случае рассматривать как противоречащий оценке $\hat{\alpha} \approx 3.5$ для «хвостового индекса α », полученной в 3.1. Дело в том, что эти оценки получены при разных гипотезах относительно характера распределений. В одном случае этой гипотезой является гипотеза о принадлежности распределения к устойчивому типу, в другом же случае – к распределению типа Парето (для «хвостовых» значений). К тому же, и это немаловажно, в одном случае объектом исследования является обменный курс, а во втором – индекс S&P500. И, вообще говоря, нет никаких веских оснований считать характер поведения их распределений одинаковым, поскольку они обусловлены разными экономическими причинами (интернациональным состоянием экономики – в случае обменных курсов, и внутренним состоянием экономики США – в случае индекса S&P500).

Заметим, что высказанная точка зрения относительно разного характера поведения обменных курсов и финансовых индексов типа S&P500, Dow и т.д. подтверждается результатами R/S-анализа (см. [17]).

Отметим также, что оценка (29) вычисляется по «центральному» значениям, а значение $\hat{\alpha} \approx 3.5$ – по «хвостовым». Поэтому несовпадение оценок лишь подтверждает высказанную ранее мысль о том, что в разных областях значений финансовые индексы описываются разными стандартными распределениями и какое-то одно, универсальное, распределение, видимо, найти трудно.

Тот факт, что в центральной части эмпирические плотности $\hat{p}^{(n\Delta)}(x)$ хорошо аппроксимируются симметричными устойчивыми плотностями $\hat{p}^{(n\Delta)}(x)$, подтверждается также следующими рассуждениями, основанными на свойствах автомодельности. Рассмотрим выборку объема k

$$(\Delta S_{(n)k_1}, \dots, \Delta S_{(n)k_k}), t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} = n\Delta,$$

с временным шагом $n\Delta$, где $\Delta = 1$ мин. Если от этой выборки перейти к выборке

$$(n^{-1/\alpha} \Delta S_{(n)k_1}, \dots, n^{-1/\alpha} \Delta S_{(n)k_k}),$$

то эта новая выборка должна иметь то же самое распределение, что и $(\Delta S_{t_1}, \dots, \Delta S_{t_k}), t_i - t_{i-1} = \Delta$.

Поэтому оцениваемые по этим выборкам одномерные плотности (одинаково распределенных) величин $n^{-1/\alpha} \Delta S_{(n)k_i}$ и ΔS_{t_i} должны были бы быть, согласно (28), «сильно похожими». Коэффициент γ входящий в (25), может быть оценен из (26) по эмпирической плотности $\hat{p}^{(\Delta)}(0)$ и оценке $\hat{\alpha} = 1.40$. Полученная оценка $\hat{\gamma}$ для γ равна 0.00375.

Заключение

Проведенное нами исследование статистического характера поведения статистик эмпирических распределений широкого круга финансовых данных позволили нам сделать вывод, что основополагающую гипотезу рынков капитала о рациональности поведения инвесторов следует подвергнуть более тщательному тестированию.

Опираясь на проведенные в работе вычисления статистических характеристик (данных FOREX, DJ, S&P), мы пришли к выводу, что в центральной части эмпирические распределения обладают значительной «вытянутостью», а также «тяжелыми хвостами» в ограниченных областях. Нами были предложены следующие математические модели эмпирических распределений: $\hat{\alpha}$ -устойчивое распределение, гиперболическое распределение.

Для описания распределений в граничных областях предложено распределение Парето. Также показано, что нецелесообразно пользоваться какой-то одной математической моделью распределения. В работе рассмотрены методы оценивания меры тяжести «хвоста» – хвостовой индекс Хилла, методы бутстрэпа (bootstrap) и складного ножа (jackknife) и компьютерно реализованы алгоритмы их вычисления.

Стихова Ольга Владимировна

Литература

1. Dacorogna M.M., Müller U.A., Nagler R.J., Olsen R.B., Pictet O.V. / «A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market.» // *Journal of the International Money and Finance*. 1993. V. 12. №4. P. 413-438.
2. Mandelbrot B.B. The variation of some other speculative prices // *Journal of Business*/ 1967.V. 40. P. 393-413.
3. Guillaume D.M., Dacorogna M.M., Dave R.D., Müller U.A. // «From the birds eye to the microscope: a survey of new stylized facts of intro daily foreign exchange markets.» // *Finance and stochastic*.» 1997. V 1. №2 95-129.
4. Щетинин Е.Ю., Лапушкин А.С. Статистические методы и математические модели оценивания финансовых рисков. Математическое моделирование, 2004, т. 16, вып. 5. М. Наука, 2004.
5. Fama E.F., Miller M.H., The Theory of stock market prices. The theory of business. 1972.
6. Щетинин Е.Ю., Назаренко К.М., Парамонов А.В. Инструментальные методы стохастического анализа экстремальных событий // *Вестник ННГУ, Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2(29), 2004. Н. Новгород.
7. Mandelbrot B.B. The stable Paretian income distribution when the apparent exponent is near two. // *International Economic Review*. 1963. №4.
8. Müller U.A., Dacorogna M.M., Dave R.D., Pictet O.V., Olsen R.B., Ward J.R. Fractals and Intrinsic Time – A Challenge to Econometricians. Working paper. Zürich: «Olsen & Associates», Research Insitute for Applied Economics.1998; Technical Report UAM 1998-07-16.
9. Fama E.F., Roll R., Parameter estimates for symmetric stable distribution // *Journal of American Statistical Association*. 1997. V. 66. P. 331-338.
10. Walter C. Levy-stability under addition and fractal structure of markets. // 5th AFIR International Colloquium (Bruxelles, September, 1995)
11. Barnea A., Downes D. «A reexamination of the empirical distribution of stock price changes.» // *Journal of American Statistical Association*. 1993. V. 68. P. 348-350.
12. Щетинин Е.Ю. Статистический анализ структур экстремальных зависимостей на российском фондовом рынке // *Вестник Российского университета дружбы народов. Прикладная и компьютерная математика*, 2005, т. 4, 1, М.: РУДН, 2005.
13. Hill B.M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. // *The Annals of Statistics*. 1975. V. 5. N3. P. 1163-1173.
14. Mitnik S., Rachev S.T. Financial Modeling and Option Pricing with Alternative Stable Models. New York Wiley.
15. Mantegna R.N., Stanley H.E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index. // *Nature*. 1995. V. 376. P. 46-49.
16. Щетинин Е.Ю. Математическая теория структур статистических зависимостей. М.: ИЦ МГТУ СТАНКИН, 2005
17. Щетинин Е.Ю. К анализу показателей стоимости акций компаний на фондовом рынке с высокой волатильностью. *Финансы и кредит*, 2006, 30(234), М.: Финансы и кредит.

РЕЦЕНЗИЯ

В работе Стиховой О.В. строятся математические модели, позволяющие описать плотности эмпирических распределений посредством не слишком громоздких формул, при этом рассматриваются такие финансовые показатели, как колебания обменных курсов валют на значительных промежутках времени, и отмечается, что предложенная методика применима и в анализе других финансовых статистик, например, цен акций.

Построение математических моделей рассматриваемых финансовых показателей осуществляется в три этапа. На первом этапе ступенчатая линия эмпирической плотности рассматриваемого распределения с неравномерно расположенными на оси времени моментами наблюдений заменяется непрерывной кривой. На втором этапе полученная кривая подвергается процедуре дискретизации с равноотстоящими друг от друга моментами «воображаемых» наблюдений. На третьем этапе для подправленной эмпирической плотности распределения строится моделирующая плотность, описываемая компактными математическими формулами.

Проведенный анализ обосновывает с высокой степенью надежности необходимость отвергнуть гипотезу нормальности моделей эмпирических распределений. Научная новизна работы заключается в том, что на основе строгих математических методов автором показано, что для адекватного описания различных областей изменения рассматриваемых случайных величин необходимо пользоваться различными математическими моделями. Впервые для описания центральной области изменения рассматриваемой случайной величины, т.е. области вокруг ее математического ожидания, предложена модель так называемых α -устойчивых распределений, а для описания «хвостов», т.е. участков, удаленных от математического ожидания, предложено распределение Парето.

Считаю, что статья Стиховой О.В. «Математическое моделирование статистик финансовых данных и их эмпирических распределений» может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Кузичев А.А., к.ф.-м.н., ГОУ ВПО Московский Государственный технологический Университет «СТАНКИН», кафедра «Математика»

7.2. MATHEMATICAL MODELLING OF STATISTICS OF THE FINANCIAL DATA AND THEIR EMPIRICAL DISTRIBUTIONS

O.V. Stikhova, the Post-graduate Student,
the Teacher of Chair «Applied Mathematics»

This paper is devoted to research of statistical properties of financial time series, modeling of statistics of the financial data and their empirical distributions. The main emphasis of this article will be on density of distribution on the assumption of temporary aggregation. Basing on the statistical processing, carried out in our work, of a wide reference of the financial data it is shown, that for the description of various areas of empirical distributions it is necessary to use various models. So, for the description of the central area the model of α -stable distribution is offered. For the description of a tail part of distribution the Pareto distribution is offered. The paper presents the numerical implementation of estimation algorithm of parameters of β -stable distribution.